Los puentes de Königsberg, topología y redes eléctricas

Félix Redondo Quintela y Roberto C. Redondo Melchor
Universidad de Salamanca
6 de octubre de 2024

En el prólogo del libro *Redes Eléctricas de Kirchhoff. Teoría de Circuitos* citamos el llamado problema de *los siete puentes de Königsberg* por su relación con la topología y, por ella, con el análisis de redes eléctricas. En este artículo tratamos el tema con más detalle.

El problema de los siete puentes de Königsberg

En Königsberg, en tiempos de Leonhard Paul Euler (Basilea 1707, San Petersburgo 1783), un puente conectaba dos islas de un río; otros cuatro unían una de ellas con las dos partes de la ciudad a los lados de ese río; y otros dos partían de la otra isla con el mismo fin. De la primera salían, por tanto, cinco puentes y de la segunda tres (Fig. 1).

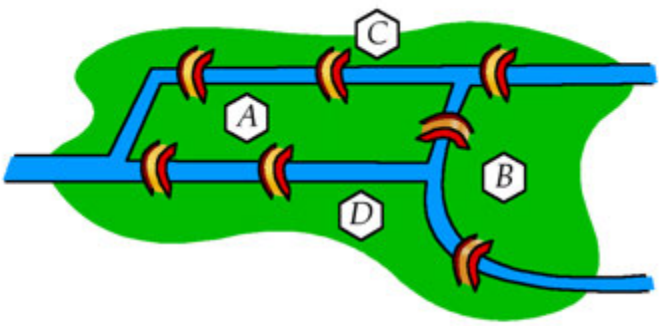

Fig. 1.- Situación esquemática de los siete puentes de Königsberg (en rojo) en la época de Leonhard Paul Euler.

Se trataba de encontrar un camino que, a partir de un punto, retornara a él cruzando todos los puentes una sola vez. Pero ese camino no existía, pues si el punto de partida se sitúa en una isla, para salir y volver por puentes distintos deben llegar dos a ella. Si son tres no podremos volver a salir y retornar sin cruzar más de una vez algún puente. Si son cuatro sí. En general, si el número de puentes es par, sí es posible salir y volver a entrar a la isla cruzando todos sus puentes una sola vez. Lo mismo si el punto de partida está en cualquiera de los dos lados del río: por cada puente que se utiliza para llegar a una isla, se necesita otro para salir de ella. Así que basta que a una llegue un número impar de puentes para que el camino no exista. Como en las dos ese número era impar, el camino no existía.

La topología

El planteamiento de este problema, como el de cualquier otro, se puede generalizar considerando solo las variables que intervienen en la deducción del resultado, lo que llamamos abstracción[1]. Puede hacerse con un dibujo como el de la figura 2. En él aparecen como puntos las cuatro zonas separadas por el agua del río. Dos de ellos, *A* y *B*, representan las islas, y *C* y *D* los lados del río. Cada puente se indica por un segmento de línea entre los puntos que une. Si partimos de uno de esos puntos por una línea (por un puente), como se ha establecido que por ese camino no se puede volver, debe haber al menos dos líneas que confluyan en cada punto, y otros dos por cada vez que haya que repetir la ida y la vuelta. Es decir, para que el camino que buscamos exista, es necesario que el número de las líneas (puentes) que llegan a cada punto sea par. Da igual que el punto represente una isla o uno de los dos lados del río. Si a cualquiera de ellos llega un número impar de líneas, el camino no existe.

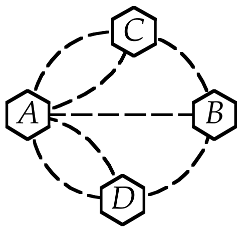

Fig. 2.- Grafo que representa las islas (*A* y *B*), las orillas (*C* y *D*), y los puentes (líneas discontinuas).

Desde que Euler publicó en 1736 ese resultado[2], se fue utilizando '*topología*', del griego *τοπος*, topos, lugar, sitio, y de *-logía*, estudio, *estudio de un lugar*, para designar problemas similares, cuya solución depende solo de las relaciones entre las posiciones de objetos y no de otras variables, como formas y medidas por ejemplo. Gran parte de las relaciones de posición se pueden indicar gráficamente con dibujos de solo puntos y líneas. Esas representaciones se llaman *grafos*. La parte de la topología que se ocupa de ellos se llama *teoría de grafos*[3].

---

[1] La primera acepción de *abstraer* del Diccionaraio de la Lengua Española es "Separar por medio de una operación intelectual un rasgo o una cualidad de algo para analizarlos aisladamente o considerarlos en su pura esencia o noción".

[2] Lo hizo en 1735 con un informe, y en 1736 con un artículo, que se cita a veces como *Los siete puentes de Königsberg*, aunque su título es *Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis* (Solución de Problemas Relacionados con la Geometría de un Lugar). En él ofrece una solución general.

[3] Por tanto, *topología* es la parte del conocimiento que se ocupa del estudio de las propiedades debidas solo a relaciones de posición. *Grafo* es una representación gráfica de solo puntos y líneas que se utiliza para indicar relaciones de posición.

Redes eléctricas

La teoría de redes eléctricas contiene topología. Casi todo el capítulo 2 del libro citado en el primer parágrafo lo es. En él se representan las redes eléctricas solo por puntos y líneas, por grafos, y se consideran en ellos pares de nudos, ramas en serie, en paralelo, conjuntos de corte, caminos cerrados, mallas, árboles,..., nombres de relaciones de posición, topología de redes eléctricas.

La topología está presente en toda la teoría de las redes eléctricas. La primera ley de Kirchhoff expresa que la suma de las intensidades de las corrientes eléctricas que llegan a cada nudo es cero si todas esas corrientes son estacionarias. Es una propiedad que ocurre en cada nudo de cualquier red eléctrica, pero depende del tipo de corrientes de las ramas que llegan a él.

La segunda ley de Kirchhoff es "más topológica". Suele expresarse diciendo que *la suma de las tensiones de los pares de nudos que forman un camino cerrado en cualquier red eléctrica es cero*. La tensión entre un par de nudos es la diferencia entre los potenciales de esos nudos. El potencial de cada nudo es un número real asignado a ese nudo. Lo que dice por tanto la segunda ley de Kirchhoff es que, si se suman esas diferencias en un camino cerrado, la suma es cero.

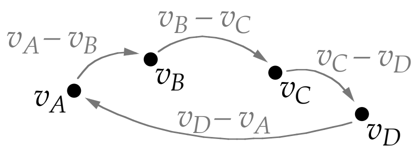

Fig. 3.- Cuatro puntos con asignaciones arbitrarias, y las diferencias de esas asignaciones.

Pero es que eso ocurre aunque se trate de puntos que no sean nudos de una red eléctrica, y aunque los números asignados a cada punto no sean potenciales eléctricos. Si consideramos cualquier conjunto de puntos (Fig. 3) y asignamos a cada uno un número real, un número complejo, un vector, una función,..., cualquier elemento de lo que se llama un grupo conmutativo, la suma de sus diferencias a lo largo de cualquier camino cerrado es

$$(v_A - v_B) + (v_B - v_C) + (v_C - v_D) + (v_D - v_A) =$$
$$v_A - v_B + v_B - v_C + v_C - v_D + v_D - v_A = 0$$

Siempre es cero. Cualquier conjunto de puntos en los que haya caminos cerrados de pares de ellos la cumple. Un conjunto de dos puntos, A y B, ya tiene caminos cerrados de pares de nudos: si se parte de A, el camino (AB, BA) es cerrado, y

$$(v_A - v_B) + (v_B - v_A) = 0$$

Si se parte de B el (BA, AB) es cerrado, y

$$(v_B - v_A) + (v_A - v_B) = 0$$

En un conjunto de dos puntos ya se cumple la segunda ley de Kirchhoff.

Lo que expresa la segunda ley de Kirchhoff es una propiedad de cualquier camino cerrado de pares de puntos, sean nudos de una red eléctrica o no, una propiedad topológica[4].

Y hay más relaciones de posición en la teoría de las redes eléctricas.

[4] Ver *Leyes de Kirchhoff y conservación de la carga eléctrica y de la energía* de la sección *Comentarios técnicos* de este sitio web.